Suponha que X e Y sejam duas variáveis aleatórias.

I. independência plena: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$

II. independência da média condicional: $E(Y|X) = E(Y)$

III. linear (ou correlaçao zero): $Cov(Y,X) = 0$

Mostre que $(I) \Rightarrow (II) \Rightarrow (III)$. Com exemplos, mostre que o caminho contrário não é verdadeiro.

Mostraremos inicialmente que $(I) \Rightarrow (II)$ e, em seguida, que $(II) \Rightarrow (III)$.
Prova 1: $(I) \Rightarrow (II)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y \mid X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times f_{Y|X}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \times \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy \overset{(I)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} y \times \frac{f_X(x) \times f_Y(y)}{f_X(x)}dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times f_Y(y)\,dy = \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Prova 2: $(II) \Rightarrow (III)$
Das propriedades de distribuição conjunta sabemos que: $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y)\, f_X(x)$.
Temos então:

$$\begin{aligned}Cov(X,Y) &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(XY) \overset{(II)}{=} \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y \mid X) - \mathbb{E}(XY) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y)\,dy\right) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,dxdy\right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, y f_{Y|X}(y)\,dxdy\right) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{Y|X}(y)\, f_X(x)\,dxdy\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Para mostrarmos que o inverso não vale, suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias tais que $X \sim N(0,1)$ e $Y = X^2$. Desta forma, temos:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \tag{1}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = var(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1 \tag{2}$$
$$\mathbb{E}(X^3) = 0 \tag{3}$$

Vale destacar que (3) é derivada da constatação de que a assimetria (terceiro momento centrado na média) de uma normal padrão é zero. Temos então que (III) é obedecida, uma vez que:

$$Cov\,(X,Y) = Cov\,\left(X, X^2\right) = \mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,\left(X^2\right) - \mathbb{E}\,\left(X.X^2\right) = 0 - \mathbb{E}\,\left(X^3\right) = 0$$

No entanto, (II) não vale, já que:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\,(Y) = \mathbb{E}\,\left(X^2\right) = 1 \\ &\mathbb{E}\,(Y \mid X) = \mathbb{E}\,\left(X^2 \mid X\right) = X^2 \end{aligned}$$

Como $X^2 \neq 1$ para $X \neq 1$, encontramos um exemplo que mostra que (III) não implica (II).

Para mostrar que (II) não implica (I) usaremos um exemplo de duas variáveis aleatórias discretas. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta, $f_{X,Y}\,(x,y)$, dada por:

$Y \setminus X$	2	4	$\mathbb{P}\,(X)$
1	1/2	0	1/2
3	0	1/2	1/2
$\mathbb{P}\,(Y)$	1/2	1/2	1

Verificamos que (II) vale, visto que:

$$\mathbb{E}\,(Y) = 1 \times \mathbb{P}\,(Y=1) + 3 \times \mathbb{P}\,(Y=3) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 2$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(Y \mid X) &= \mathbb{E}\,(Y \mid X=2) \times \mathbb{P}\,(X=2) + \mathbb{E}\,(Y \mid X=4) \times \mathbb{P}\,(X=4) \\ &= [1 \times \mathbb{P}\,(Y=1 \mid X=2) + 3 \times \mathbb{P}\,(Y=1 \mid X=2)] \times \frac{1}{2} + \\ &+ [1 \times \mathbb{P}\,(Y=1 \mid X=4) + 3 \times \mathbb{P}\,(Y=3 \mid X=4)] \times \frac{1}{2} = \\ &= \left[1 \times \frac{\mathbb{P}\,(Y=1, X=2)}{\mathbb{P}\,(X=2)} + 3 \times \frac{\mathbb{P}\,(Y=3, X=2)}{\mathbb{P}\,(X=2)}\right] \times \frac{1}{2} + \\ &+ \left[1 \times \frac{\mathbb{P}\,(Y=1, X=4)}{\mathbb{P}\,(X=4)} + 3 \times \frac{\mathbb{P}\,(Y=3, X=4)}{\mathbb{P}\,(X=4)}\right] \times \frac{1}{2} = \\ &= \left[1 \times \frac{1/2}{1/2} + 3 \times \frac{0}{1/2}\right] \times \frac{1}{2} + \left[1 \times \frac{0}{1/2} + 3 \times \frac{1/2}{1/2}\right] \times \frac{1}{2} = \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 2 = \mathbb{E}\,(Y) \end{aligned}$$

Lembrando ainda que $f_X\,(x) = \mathbb{P}\,(X=x)$, $f_Y\,(y) = \mathbb{P}\,(Y=y)$ e que $f_{X,Y}\,(x,y) = \mathbb{P}\,(X=x, Y=y)$, podemos verificar que (I) não vale, uma vez que para $X=2$ e $Y=3$ temos:

$$\begin{aligned} &f_X\,(2) = \mathbb{P}\,(X=2) = \frac{1}{2} \\ &f_Y\,(3) = \mathbb{P}\,(Y=3) = \frac{1}{2} \\ &f_{X,Y}\,(2,3) = \mathbb{P}\,(X=2, Y=3) = 0 \neq f_X\,(2) \times f_Y\,(3) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$